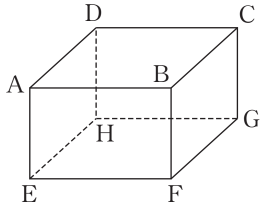
PART2 空間のベクトル

要点 ① 空間のベクトル

平面におけるベクトルと同様に，空間において，その位置を問わず向きと大きさだけに着目したものを，空間の「ベクトル」という。空間内の有向線分 AB の表すベクトルを「 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 」，その大きさを「 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ 」で表す。

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きと大きさが一致するとき，この 2 つのベクトルは「等しい」といい，「 $\vec{a}=\vec{b}$ 」と表す。

例　右図の直方体 ABCD−EFGH において



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=$

空間のベクトルにおいても, 逆ベクトル, 零ベクトル, 単位ベクトルや, ベクトルの加法, 減法, 実数倍などは，平面の場合と同様に定義され，次のことが成り立つ。

交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$　　$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$　　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

k，l を実数とするとき

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}=kl\vec{a}$　　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

また，空間のベクトルの平行についても，平面の場合と同様に，次のことが成り立つ。

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\iff\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

空間の 4 点 O，A，B，C について，平面の場合と同様に，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

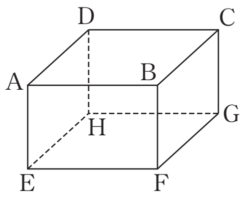
$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は「1 次独立」であるという。3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が 1 次独立であるとき

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c} \iff s=s',\ t=t',\ u=u'$$

が成り立つ。

2 右の図の直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{AF}$　　(2) $\overrightarrow{AG}$

(3) $\overrightarrow{FC}$　　(4) $\overrightarrow{CE}$

Point Pickup

ベクトルの分割

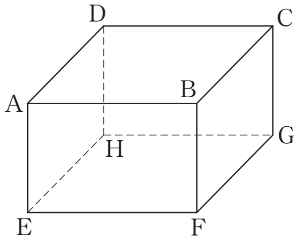
空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，2つのベクトルの和や差を用いて

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB},\qquad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

のようにベクトルを分割し，指定されたベクトルを用いて表すことができる。

第5講 PART2 確認問題

次の図の直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



1 $\overrightarrow{AC}=$ [ア]

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

2 $\overrightarrow{BE}=$ [イ]

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

3 $\overrightarrow{BH}=$ [ウ]

① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

4 $\overrightarrow{\mathrm{EC}} =$ エ

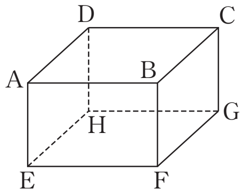
① $\vec{a}+\vec{b}$　② $-\vec{a}+\vec{c}$　③ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

④ $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　⑤ $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　⑥ $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

[MEMO]

PART2 空間のベクトル

2 右の図の直方体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおく，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

[解答]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FC}}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{b}-\vec{c}$

（別解）

$$\overrightarrow{\mathrm{FC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c})$$
$$=\vec{b}-\vec{c}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

（別解）

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

第 5 講　PART2 確認問題 解答

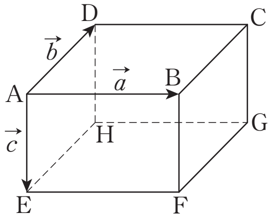
1

[正解] ア：①

[解説]

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ [A]

$=\vec{a}+\vec{b}$



> [A]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。
> $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
> $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
> $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

2

[正解] イ：②

[解説]

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ [B]

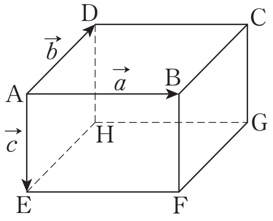
$=-\vec{a}+\vec{c}$

（別解）

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$ [B]

$=\vec{c}-\vec{a}$

$=-\vec{a}+\vec{c}$



> [B]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。
> $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$
> $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
> $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

3 [正解] ウ：⑥

[解説]

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$ [C]

$=-\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$

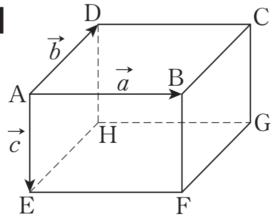
(別解)

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}$ [C]

$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH})-\overrightarrow{AB}$

$=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$

$=-\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}}$



[C]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

4 [正解] エ：⑤

[解説]

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GC}$ [D]

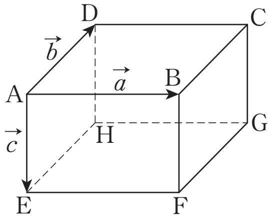
$=\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$

(別解)

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$ [D]

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AE}$

$=\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}-\vec{\boldsymbol{c}}$



[D]　空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$